KMA

JMÉNO a PŘÍJMENÍ

Písemná část přijímací zkoušky - UMSŠ 2020

verze **1** / 29. 6. 2020

Pokyny k vypracování:

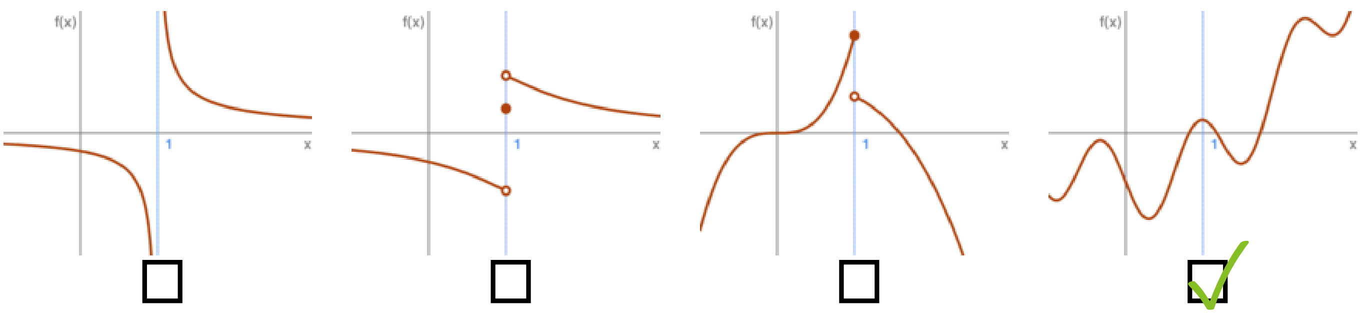
Za každý správně vyřešený příklad lze získat **2 body**. U zaškrtávacích otázek, je vždy správná **právě jedna** odpověď. Správnou odpověď zaškrtněte. Pokud nebude zaškrtnuta žádná nebo více než jedna odpověď, bude příklad hodnocen jako nesprávně zodpovězený. Otevřené příklady vyřešte na samostatný papír.

1. příklad

[2 body]

Máme k dispozici načrtnuté grafy funkcí. Která z těchto funkcí má vlastní limitu v bodě $x = 1$.
Tj. kdy platí:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = a, \qquad a \in \mathbb{R}$$



2. příklad

[2 body]

Uveďte funkční předpis a načrtněte graf funkce f takové, že definiční obor $D_f = \mathbb{R}$ a není spojitá v $x_0 = 1$.

… tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:

Např. funkce $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 1, \end{cases}$ nebo $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1),$ nebo Dirichletova funkce

3. příklad

[2 body]

Vyberte rovnici, která nemá v $\mathbb{R}$ řešení:

- [x] $\sin(2x+3) = \pi$
- [ ] $\cos(3x-4) = 0$
- [ ] $\sqrt{4x+2} = e^2$
- [ ] $\cosh(2x+4) = \frac{4}{3}$

4. příklad [2 body]

Vyberte funkci, pro kterou platí: $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

- [ ] $f(x) = \cos x$
- [x] $f(x) = \operatorname{arctg} x$
- [ ] $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- [ ] $f(x) = e^x$

5. příklad [2 body]

Určete hodnotu integrálu (výpočtem nebo graficky)

$$\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,\mathrm{d}x.$$

řešení:
1

6. příklad [2 body]

Vyberte funkci, jejímž definičním oborem je množina $D(f) = \mathbb{R}^2$.

- [ ] $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
- [ ] $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
- [ ] $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1}$
- [x] $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

7. příklad [2 body]

Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$.

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
$D(f) = R^2 - \{x = 0 \vee y = 0\}$

8. příklad [2 body]

Uveďte libovolnou parametrizaci kružnice se středem v bodě $[2,3]$ a poloměrem $r = 4$.

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
např. $x = 2 + 4\cos t,\ y = 3 + 4\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi)$

9. příklad

[2 body]

Která z následujících funkčních řad je mocninná ?

- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2n}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x^n}$
- [x] $\sum_{n=1}^{\infty} e^n (x+6)^n$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$
- [ ] $\sum_{n=1}^{\infty} nx$

10. příklad

[2 body]

Doplňte číslo C tak, aby rovnice

$$z = 5x + 2y + C$$

popisovala tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = xy$ v bodě $[2,5]$.

$$C = \_\_\_\_\_\_$$

řešení:
$C =$ -10

11. příklad

[2 body]

Mějme lineární diferenciální rovnici:

$$u'' + a\,u' + b\,u = 0$$

Doplňte hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby obecné řešení bylo:

$$u(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{5t}$$

$b =$ ______ $a =$ ______

řešení:
$a =$ -8, $b =$ 15

12. příklad

[2 body]

První křivost křivky je v každém bodě rovna nule, právě když tato křivka

- [x] je přímkou nebo částí přímky.
- [ ] je kružnicí nebo částí kružnice.
- [ ] je rovinnou křivkou.

13. příklad

[2 body]

Najděte obecnou rovnici tečny křivky $k: \ \mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t, t^2 + 1)$ v bodě $A = [-1, 2]$.

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
$2x - y + 4 = 0$

14. příklad

[2 body]

V aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}_5$ (všech uspořádaných pětic reálných čísel) je dána podmnožina

$$\mathcal{V} = \{ \, [a-b, \, 2a, \, b-c, \, a+c, \, a]^T \, ; \, a, b, c \in \mathbb{R} \, \} \, .$$

Z možných odpovědí vyberte jediné tvrzení, které je pravdivé.

- [ ] $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$ dimenze $\dim(\mathcal{V}) = 2$
- [ ] $\mathcal{V}$ není podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$
- [ ] $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$ dimenze $\dim(\mathcal{V}) = 5$
- [x] $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$ dimenze $\dim(\mathcal{V}) = 3$

15. příklad

[2 body]

Určete všechna řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -4\,, \\ x_1 & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2\,. \end{array}$$

řešení:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

řešení - nekonečně mnoho:

$$\mathbf{x} = [3, -2, 0, 1]^T + t \cdot [-1, -2, 1, 0]^T \,, \quad t \in \mathbb{R} \, .$$

16. příklad

[2 body]

Rozhodněte, zda existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokud ano, tak tuto inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ nalezněte.

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ existuje, matice $\mathbf{A}$ je regulární, např. $\det \mathbf{A} = -1 \neq 0$,
$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$.

17. příklad

[2 body]

Nechť A a B jsou dva libovolné náhodné jevy. Jejich pravděpodobnosti jsou následující: $P(A) = 0,50$, $P(B) = 0,40$ a $P(A \cap B) = 0,15$. Pro pravděpodobnosti jejich sjednocení $P(A \cup B)$ platí :

- [ ] $P(A \cup B) = 0,90$
- [ ] $P(A \cup B) = 0,85$
- [ ] $P(A \cup B) = 0,20$
- [x] $P(A \cup B) = 0,75$

18. příklad

[2 body]

Kolik je možných seřazení všech písmen A, B, C, D, E, F (bez opakování), v nichž na druhém místě není písmeno E?

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
Všech seřazení daných vlastností je

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600 .$$

19. příklad

[2 body]

Je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ sestrojený nad vektory

$$\overrightarrow{AB} = (1,2,0), \quad \overrightarrow{AD} = (0,2,-1), \quad \overrightarrow{AE} = (0,0,2).$$

Vypočtěte velikost výšky v_E z vrcholu E na stěnu $ABCD$.

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
Délka výšky je 4/3 j.

20. příklad

[2 body]

Soustava souřadnic v rovině je dána repérem (tedy počátkem a souřadnicovými vektory) $\langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, kde $P = [1, 2], \vec{e}_1 = (2, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1)$. Určete souřadnice bodu $M = [5, 1]$ v této soustavě souřadnic.

... tento příklad vyřešte na samostatný papír

řešení:
Souřadnice jsou $\{X\}_{\mathcal{S}} = [1, 2]$.